METODE NUMERICE ÎN INGINERIE

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

7.1. Aspecte generale

Se consideră o funcţie $f : [a, b] \subset \Re \to \Re$. Pentru această funcţie ecuaţia $f(x) = 0$ se numeşte ecuaţie algebrică dacă funcţia f are forma unui polinom sau poate fi adusă la această formă în urma unor transformări. In caz contrar ecuaţia se numeşte transcendentă.

Ecuaţiile: $12x^2 + x - 4 = 0$ şi $\sqrt{x^3} + 5x - 3 = 0$ sunt exemple de ecuaţii algebrice.

Ecuaţiile $\sin^2(x) - e^x + 2 = 0$, $\ln(x) + \cos(x^2) - 1 = 0$ sunt ecuaţii transcendente.

Pentru funcţia definită mai sus, o valoare $\delta \in [a, b]$ se numeşte fie zerou al funcţiei f(x), fie rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$ dacă $f(\delta) = 0$.

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Din punct de vedere al calcului numeric rezolvarea unei ecuaţii algebrice sau transcendente presupune determinarea aproximativă a tuturor rădăcinilor $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in [a, b]$ ale ecuaţiei considerate, Fig. 7.1.

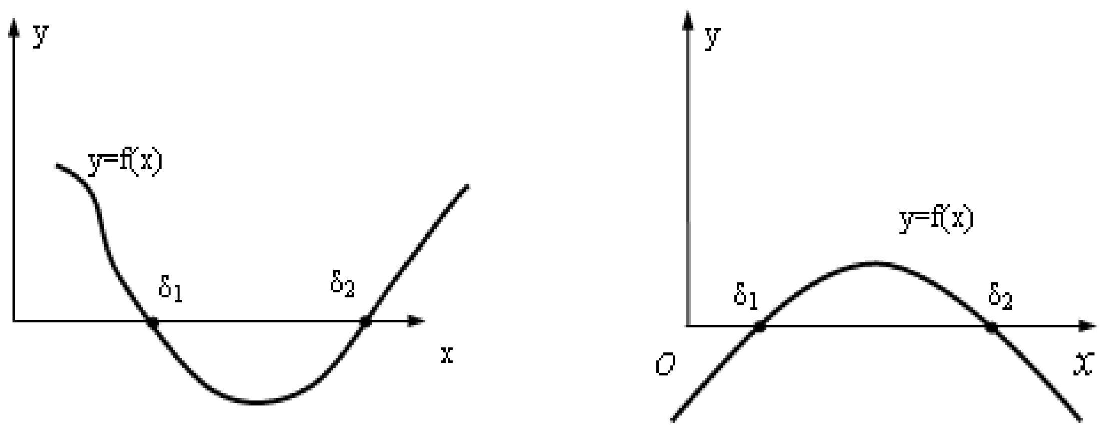

Fig. 7.1. Rădăcinile ecuaţiei f(x) = 0

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Determinarea rădăcinilor ecuației f(x) = 0 presupune parcurgerea a două etape:

- în prima etapă rădăcinile sunt separate. In cadrul acestei etape sunt determinate intervale elementare $[a_i, b_i]$ care au proprietatea că $\delta_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, n$.
- în cea de-a doua etapă se calculează aproximările celor n rădăcini din fiecare dintre intervalele elementare determinate în prima etapă. Procesul de aproximări succesive trebuie să se oprească în momentul în care rădăcinile aproximative notate cu δ' se găsesc suficient de aproape de rădăcina exactă δ. Acest aspect poate fi exprimat sub două forme:

$$\left|\delta' - \delta\right| \leq \varepsilon_1 \tag{7.1}$$

$$\left|f\left(\delta'\right)\right| \leq \varepsilon_2 \tag{7.2}$$

unde ε_1 şi ε_2 sunt numere pozitive foarte mici impuse inițial.

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

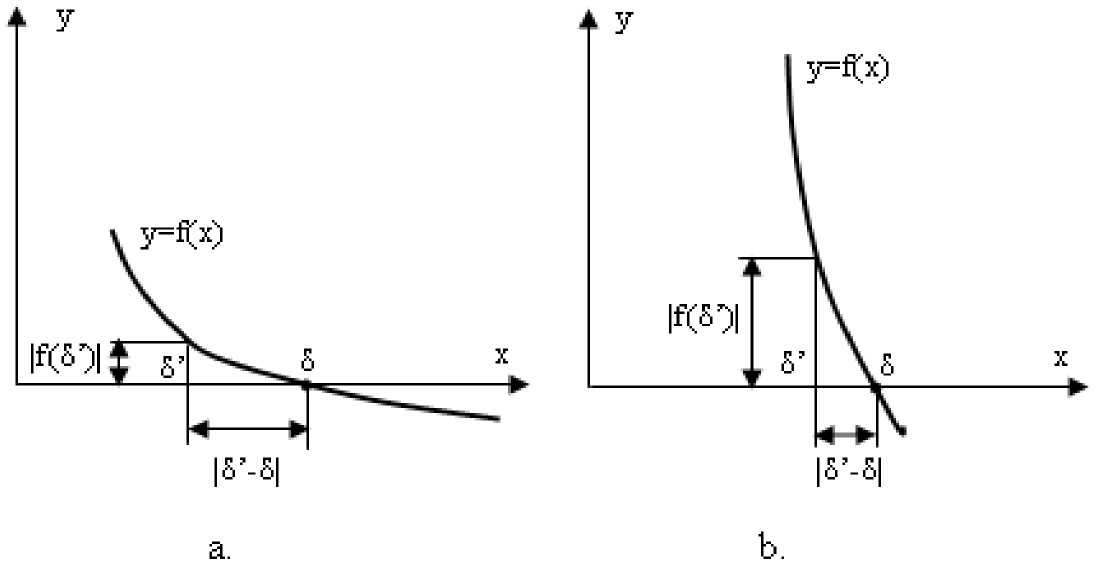

Fig. 7.2. Evidenţierea rădăcinilor aproximative

7.2. Metode de aproximare a rădăcinilor

Metoda înjumătăţirii intervalului (bisecţiei)

Etapele parcurse pentru determinarea unei soluţii δ' care să aproximeze rădăcina reală sunt:

- se fac notaţiile: $a_1 = a$, $b_1 = b$
- se calculează $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$;
- dacă $f(a_1) \cdot f(x_1) < 0$, atunci: $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$, altfel: $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$;
- se calculează $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$;
- la etapa k avem: $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

Procesul iterativ de calcul se opreşte dacă $| b_k - a_k| < \varepsilon$ sau $| f(x_k)| \leq \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv foarte mic.

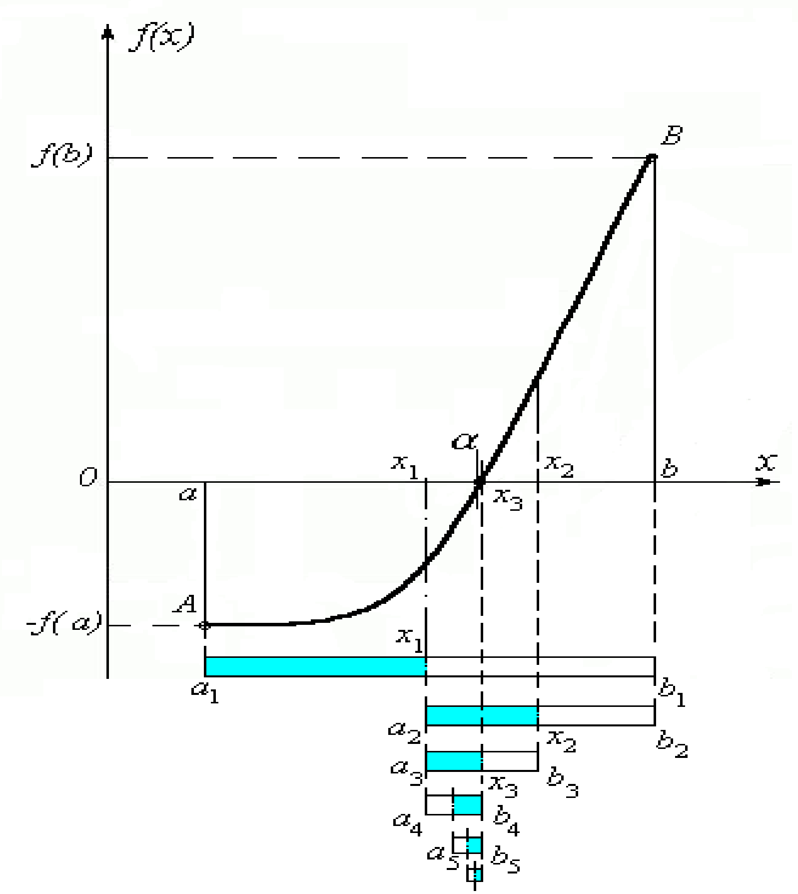

Fig. 7.3. Etapele determinării soluţiei aproximative

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Numărul de iteraţii necesare pentru atingerea unei anumite precizii poate fi stabilit de la început, pe baza lungimii intervalului care încadrează soluţia. Astfel, la fiecare pas intervalul de lucru se înjumătăţeşte, încât intervalul iniţial $\Delta x = [a, b]$ este redus la $\Delta x/2$ după prima înjumătăţire, $\Delta x/2^2$ după a doua înjumătăţire şi $\Delta x/2^n$ la reducerea n. Dacă se admite că $\Delta x/2^n = \varepsilon$ rezultă că:

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{\Delta x}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \qquad (7.3)$$

unde Δx este lungimea intervalului iniţial care încadrează soluţia.

7.2.2. Metoda aproximaţiilor succesive

Fie dată o ecuaţie f(x)=0. Functia f(x) este continuă pe un interval finit [a,b] şi are pe intervalul dat o singură rădăcina reala. Se cere determinarea rădăcinii a ecuaţiei date.

Metoda aproximaţiilor succesive înlocuieşte ecuaţia iniţială $f(x) = 0$ cu o ecuaţie echivalentă de forma:

$$x = g(x) \tag{7.4}$$

Termenul de echivalenţă are seminificaţia a două ecuaţii care au aceeaşi rădăcină. In acest caz rezolvarea ecuaţiei presupune din punct de vedere grafic determinarea punctului de intersecţie a curbelor $y=x$ şi $y = g(x)$, Fig. 7.4.

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

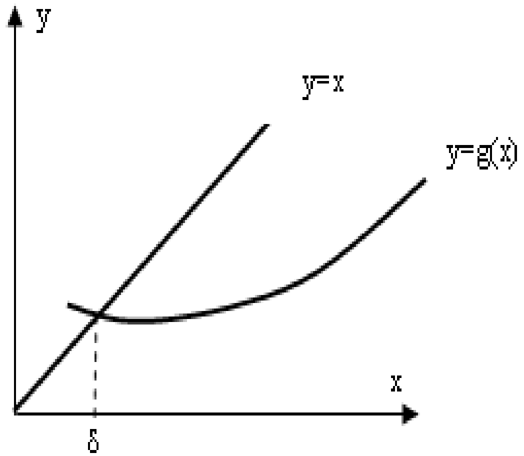

Fig. 7.4. Reprezentarea grafică a modului de rezolvare a ecuației x = g(x)

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Toate metodele de aproximare succesivă pornesc de la o aproximare inițială x_0 căreia îi sunt aplicate corecții succesive pe baza unei relații de recurență:

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{7.5}$$

unde i= 0,1,2,3,…, n , iar n reprezintă numărul iterațiilor.

Rezultă un şir al aproximațiilor succesive, $\{x\} = x_0, x_1, x_2,\ldots,x_n$, care poate fi:

- convergent, dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = \delta$, unde δ este valoarea precisă a radacini căutate a ecuației x = g(x) sau a ecuației f(x) = 0, care este una şi aceeaşi;
- divergent, dacă nu există limita succesiunii $\{x\}=x_0, x_1, x_2,\ldots,x_n$ şi atunci ecuația f(x) = 0 nu se poate rezolva.

Din punct de vedere al opririi procesului iterativ, acesta are loc atunci când este satisfăcută condiția:

$$|g(x_i) - x_i| \le \varepsilon \tag{7.6}$$

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Tinând cont de relaţia (7.5), relaţia (7.6) poate fi pusă sub forma:

$$\left|x_{i+1} - x_i\right| \leq \varepsilon \tag{7.7}$$

Astfel, procesul iterativ se va opri în momentul în care abaterea variabilei x între două iteraţii succesive scade sub valoarea ε impusă.

In funcţie de de modul de alegere a funcţiei g(x) este posibil ca şirul aproximaţiilor succesive să fie divergent. In acest caz este evident că metoda generată de g(x) nu mai conduce la aproximarea soluţiei. In această etapă dacă se foloseşte o funcţie g(x) care are expresia

$$g(x)= x + f(x) \tag{7.8}$$

şi relaţia de recurenţă (7.5) se poate stabili o condiţie suficientă de convergenţă a şirului de aproximaţii succesive.

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

In acest scop se apelează la dezvoltarea funcţiei g(x) în serii Taylor în jurul rădăcinii exacte δ:

$$g(x) = g(\delta) + \frac{x-\delta}{1!} g'(\delta) + \frac{(x-\delta)^2}{2!} g''(\delta) + \ldots + \frac{(x-\delta)^k}{k!} g^{(k)}(\delta) + \ldots \qquad (7.8)$$

In această dezvoltare în serie Taylor, punctul x trebuie să se găsească în vecinătatea rădăcinii δ. Dacă se neglijează toţi termenii de rang superior derivatei de ordinul 1 şi se înlocuieşte x cu x_i se obţine:

$$g(x_i) = g(\delta) + (x_i - \delta) \cdot g'(\delta) \qquad (7.9)$$

Ţinînd cont de relaţia (7.5), relaţia (7.9) poate fi scrisă sub forma:

$$x_{i+1} = g(\delta) + (x_i - \delta) \cdot g'(\delta) \qquad (7.10)$$

In continuare, dacă se fac următoarele notaţii:

$$\begin{cases} e_i = x_i - \delta \\ e_{i+1} = x_{i+1} - \delta \end{cases} \tag{7.11}$$

unde e_i şi e_{i+1} reprezintă abaterile celor două aproximaţii faţă de rădăcina exactă δ, relaţia (7.10) devine:

$$e_{i+1} = e_i \cdot g'(\delta) \tag{7.12}$$

Astfel, pentru ca şirul aproximaţiilor succesive să fie convergent este necesar ca, de la o iteraţie la alta, abaterile aproximaţiilor faţă de rădăcina exactă să se micşoreze adică:

$$|e_i| > |e_{i+1}| \rightarrow |g'(\delta)| < 1 \tag{7.13}$$

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

7.2.3. Metoda Newton - Raphson (tangentei)

Fie f(x) = 0 o ecuaţie algebrică sau transcendentă, care în intervalul [a, b] are o rădăcină unică δ. Presupunem că derivatele f '(x) şi f "(X) sunt continue şi păstrează semnul constant pentru $x \in [a, b]$, unde a < b.

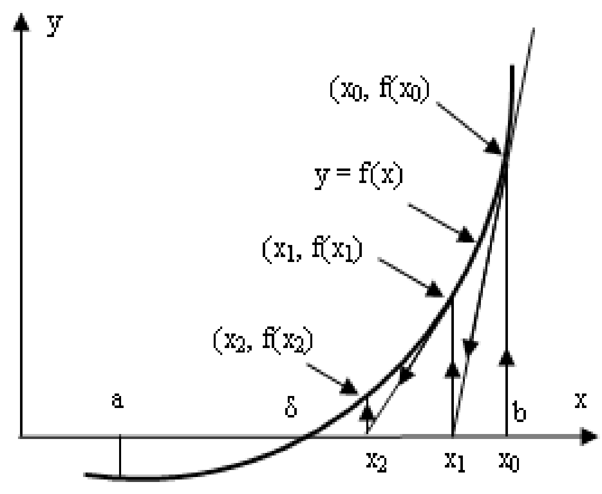

Fig. 7.5. Ilustrarea algoritmului metodei Newton-Raphson

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Din punct de formal metoda Newton – Raphson se dezvoltă pornind de la dezvoltarea în serii Taylor a funcției f(x) în jurul aproximației curente:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} + f''(x_i) \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \ldots \tag{7.14}$$

Dacă x_{i+1} este o rădăcină a funcției f(x) = 0, atunci ecuația (7.14) devine:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i) \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} + f''(x_i) \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \ldots \tag{7.15}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{7.16}$$

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Dacă se face ipoteza că $x_{i+1} = \delta$ astfel încât $f(\delta) = 0$, relaţia devine:

$$0 = f(\delta) = f(x_i) + f'(x_i)\cdot\frac{(\delta - x_i)}{1!} + f''(x_i)\cdot\frac{(\delta - x_i)^2}{2!} \tag{7.17}$$

$$-f(x_i) \approx f'(x_i)\cdot\frac{(\delta - x_i)}{1!} + f''(x_i)\cdot\frac{(\delta - x_i)^2}{2!} \tag{7.18}$$

Dacă se înlocuieşte relaţia (7.18) în relaţia (7.16) şi se defineşte eroarea de aproximare $e_i = x_i - \delta$ se obţine:

$$x_{i+1} \approx x_i + (\delta - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)}\cdot(\delta - x_i)^2 \tag{7.19}$$

$$|e_{i+1}| \approx \left|\frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)}\right|\cdot e_i^2 = A_k e_k^2 = |A_k e_k|\cdot|e_k| \tag{7.20}$$

7.2.4. Metoda secantei (Lagrange)

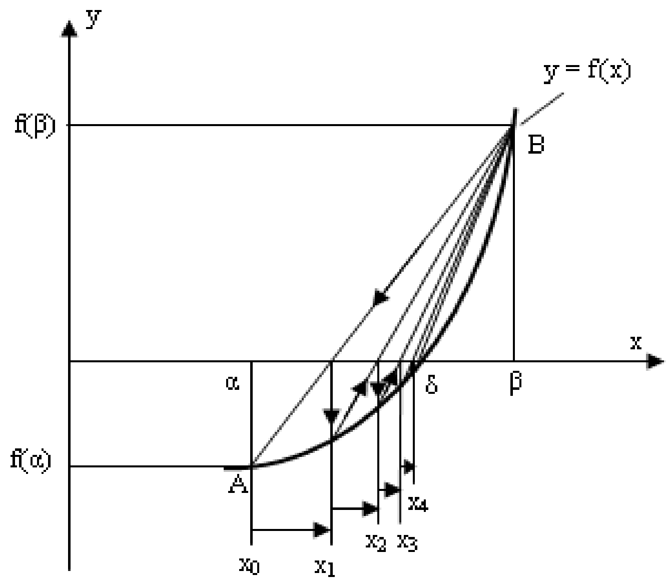

Fig. 7.7. Agoritmul de obţinere a soluţiei prin metoda coardei

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Din punct de vedere matematic aproximarea funcţiei prin coarda AB conduce la ecuaţia unei drepte:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (7.22)$$

Prima aproximare x_0 se determină înlocuind în relaţia (7.22) pe x cu x_0 şi pe f(x) cu 0, rezultând:

$$x_0=\alpha-f(\alpha)\cdot\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} \qquad (7.23)$$

In continuare pentru reprezentarea din Fig. 7.7 aproximaţia x_1 se determină înlocuind în relaţia (7.23) pe β cu x_0.

$$x_1=\alpha-f(\alpha)\cdot\frac{x_0-\alpha}{f(x_0)-f(\alpha)} \qquad (7.24)$$

ECUAŢII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Plecând de la relațiile (7.23) și (7.24) se poate stabili o relație generală de forma:

$$x_{n+1} = \alpha - f(\alpha) \cdot \frac{x_n - \alpha}{f(x_n) - f(\alpha)} \tag{7.25}$$

Pentru relația (7.25) funcția g(x) care generează metoda are forma:

$$g(x) = \alpha - f(\alpha) \cdot \frac{x - \alpha}{f(x) - f(\alpha)} \tag{7.26}$$